10. Maďarský matematik Endre Szemerédi získal Abelovu cenu za rok 2012

Michal Křížek, Pavel Pudlák, Lawrence Somer

10.1 Prolog

V roce 2012 putovala Abelova cena za matematiku do Maďarska k prof. Endre Szemerédimu, který ji dostal za své fundamentální objevy v diskrétní matematice a teoretické informatice a jejich dlouho-

Endre Szemerédi

trvajícím vlivům na aditivní teorii čísel a ergodickou teorii. Dalším matematikem maďarského původu, který tuto nejprestižnější cenu za matematiku získal v roce 2005, se stal Peter Lax. Matematika v Maďarsku má totiž dlouholetou tradici. Vzpomeňme na několik dalších význačných maďarských matematiků světového významu, jakými byli např. János Bolyai, Lipót Fejér, Marcel Grossmann, Alfréd Haar, András Hajnal, Cornelius Lanzcos, László Lovász, John von Neumann, Rózsa Péterová, George Pólya, Alfréd Rényi, Marcel Riesz, Endre Süli, Pál Turán a jeho manželka Vera T. Sósová, Karl Zsigmondy a též Pál Erdős, který má v databázi Mathematical Reviews registrováno přes 1 500 vědeckých prací. Jen málo zemí velikosti Maďarska může předvést podobný seznam. Maďaři se navíc mohou pochlubit 13 nositeli Nobelových cen.

Profesor Endre Szemerédi převzal Abelovu cenu z rukou norského krále Haralda V. dne 22. května 2012 v hlavní aule univerzity v Oslu. Při této příležitosti přednesli slavnostní proslov norská ministryně pro školství a vědu Kristin Halvorsenová, předseda Norské akademie věd Nils Ch. Stenseth a předseda výběrové komise Ragni Piene (viz [20]).

O den později pak byly prosloveny 4 abelovské přednášky. V úvodní přehledové přednášce *Randomness and Pseudorandomness*, určené pro širší veřejnost, prof. Avi Wigderson z Ústavu pro pokročilá studia v Princetonu vyzdvihl Szemerédiův přínos k teorii pseudonáhodných čísel. Pak sám prof. Szemerédi přednesl hlavní laureátskou přednášku na téma *In Every Chaos There is an Order*, v níž popsal historii a současnost Szemerédiovy věty, které se budeme věnovat v kapitole 10.3. Další dvě abelovské přednášky pronesli László Lovász: *The Many Facets of the Regularity Lemma* a známý britský kombinatorik a nositel Fieldsovy medaile Timothy Gowers:[1] *The Afterlife of Szemerédi's Theorem.*

10.2 Stručný životopis

Profesor Endre Szemerédi se narodil 21. srpna 1940 v Budapešti, kde později vystudoval Univerzitu Loranda Eötvöse. Titul kandidáta věd získal na Moskevské státní univerzitě. Jeho školitelem byl slavný ma-

[1] V nakladatelství Dokořán vyšel v roce 2006 překlad knihy T. Gowerse: *Matematika. Průvodce pro každého.* Gowers ji napsal prý hlavně pro svoji ženu, aby věděla, čím se on – matematik – v práci zabývá.

tematik Israel Gelfand. Za své klíčové výsledky z teorie čísel, kombinatoriky a teoretické informatiky Szemerédi získal celou řadu prestižních ocenění: Grünwaldovu cenu (1967, 1968), Rényiho cenu (1973), Pólyovu cenu za aplikovanou matematiku (SIAM 1975), Cenu Maďarské akademie věd (1979), Cenu Rolfa Schocka za matematiku (2008), Steelovu cenu Americké matematické společnosti (2008).

Připomeňme ještě, že prof. Szemerédi navštívil Prahu v roce 2010, když mu Univerzita Karlova udělila čestný doktorát. V současnosti pracuje v Matematickém ústavu Alfréda Rényiho Maďarské akademie věd v Budapešti. Je též zaměstnán na Státní univerzitě v New Jersey (Rutgers Department of Computer Science). Současně je členem věhlasného Ústavu pro pokročilá studia v Princetonu. Endre Szemerédi je ženatý a má pět dětí.

10.3 Aditivní teorie čísel

V této části se soustředíme na nejznámější Szemerédiovy výsledky z aditivní teorie čísel, z teorie grafů a teoretické informatiky. Aditivní teorie čísel se věnuje studiu podmnožin celých čísel a jejich vlastností při sčítání (viz [11] a [12]). Jako příklad uveďme známou **Goldbachovu hypotézu**:

Každé sudé číslo větší než 2 *lze napsat jako součet dvou prvočísel.*

Tato domněnka dodnes není dokázána. Vznikla během vzájemné korespondence mezi Eulerem a Goldbachem v roce 1742 (např. vidíme, že $4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 5 + 5 = 3 + 7$). Podle některých pramenů ji poprvé vyslovil Euler inspirován Goldbachem. V roce 1937 ruský matematik Ivan Matvejevič Vinogradov (1891–1983) dokázal, že existuje přirozené číslo n_0 tak, že každé liché $n > n_0$ lze vyjádřit jako součet tří prvočísel (viz [19]). Navíc nedávno Terence Tao dokázal, že každé liché číslo větší než jedna je součtem nejvýše pěti prvočísel [18].

V roce 1973 čínský matematik Ťing-žun Čchen dokázal, že každé dostatečně velké sudé číslo je součtem prvočísla a součinu nejvýše dvou prvočísel (viz [8]). Tato věta se zatím považuje za nejlepší výsledek týkající se Goldbachovy hypotézy. Jiná Čchenova věta tvrdí, že pro každé sudé číslo s existuje nekonečně mnoho prvočísel p tak, že $p + s$ je buď prvočíslo, nebo součin dvou prvočísel.

Dalším příkladem z aditivní teorie čísel je Waringův problém, který formuloval Edward Waring (1734–1798) kolem roku 1770. Pro dané přirozené číslo k označme

$$A_k = \{0^k, 1^k, 2^k, 3^k, \dots\}$$

množinu k-tých mocnin. Ve *Waringově problému* jde o určení nejmenšího h tak, aby se každé přirozené číslo n dalo napsat ve tvaru

$$n = \sum_{m=1}^{h} a_m, \quad a_m \in A_k.$$

Pravděpodobně již Diofantos znal následující tvrzení:

Věta. *Každé přirozené číslo je součtem čtyř čtverců.*

Tuto tzv. *čtyřčtvercovou větu*[2] dokázal až Joseph Louis Lagrange v roce 1770. Pro $k = 2$ můžeme tedy volit $h = 4$ a snadno ověříme, že h nelze zmenšit (stačí uvažovat např. $n = 7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$).

Pro dané přirozené číslo k označme $g(k)$ nejmenší počet k-tých mocnin čísel $0, 1, 2, \dots$, jejichž součtem lze vyjádřit jakékoliv přirozené číslo. Zřejmě $g(1) = 1$ a podle čtyřčtvercové věty je $g(2) = 4$. Číslo

$$23 = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 2^3 + 2^3$$

lze vyjádřit jako součet devíti třetích mocnin nezáporných celých čísel a snadno nahlédneme, že tento počet nelze snížit. Podobně zjistíme, že číslo 79 lze vyjádřit pomocí součtu 19 čtvrtých mocnin, ale nelze je vyjádřit jejich menším počtem. Tedy $g(3) \geq 9$ a $g(4) \geq 19$. Roku 1909 Arthur Wieferich [19] odvodil, že $g(3) = 9$, a v roce 1986 Ramačandran Balasubramanian a kol. [3] dokázali, že $g(4) = 19$. Dnes víme, že $g(5) = 37$ (viz [7]) a $g(6) = 73$ (viz [13]). Pro obecné k řešení Waringova problému dosud není známo, i když se zdá, že $g(k) = 2^k - 2 + \lfloor (3/2)^k \rfloor$, kde $\lfloor r \rfloor$ označuje celou část reálného čísla r.

Nyní se soustředíme na van der Waerdenova čísla, kterými se rovněž zabývá aditivní teorie čísel. Ukážeme si, jak se tato čísla zavádějí pomocí různě obarvených přirozených čísel. Pro jednoduchost uvedeme jen jeden ilustrační příklad.

Každé přirozené číslo obarvíme buď červenou, anebo modrou barvou. Pak snadno nahlédneme, že posloupnost $1, 2, \dots, 9$ obsahuje aritmetickou podposloupnost stejné barvy a délky 3.

[2] Např. $1634 = 1^2 + 9^2 + 16^2 + 36^2$.