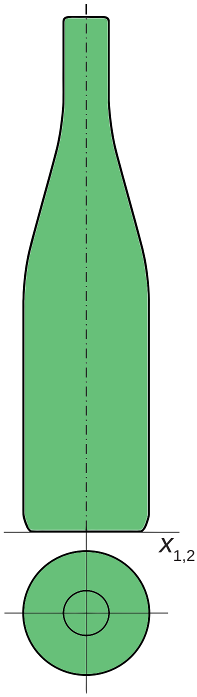
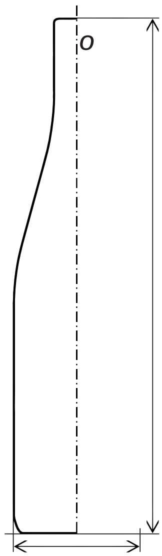
2.1 Zobrazování prostoru do roviny



Obr. 1



Obr. 2

V běžném životě se často setkáváme s instruktážními obrázky, technickými výkresy, mapami i uměleckými obrazy. Většinou jde o zobrazení prostorových útvarů do roviny. V geometrii se hovoří o promítání bodů prostoru do zvolené roviny (resp. zobrazení prostoru na rovinu), které vyhovuje určitým podmínkám. Na taková zobrazení jsou kladeny různé požadavky podle toho, jakému účelu mají obrazy sloužit. Ukažme si několik příkladů.

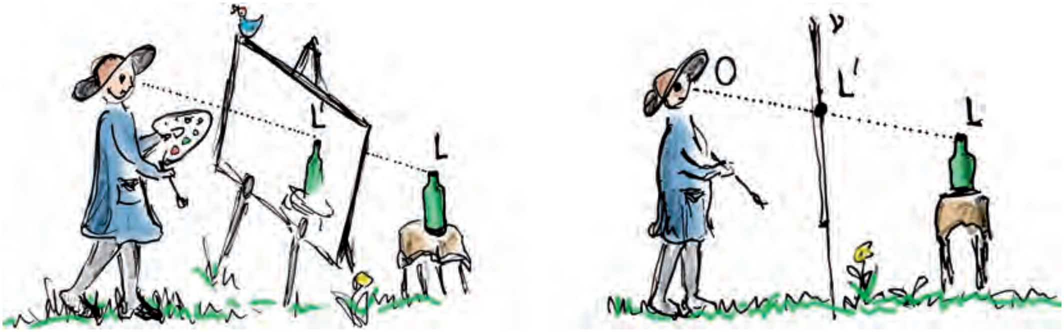
Na obr. 3 je načrtnuta situace malíře, který maluje láhev. Malíř stojí před plátnem (tentokrát pro zjednodušení před skleněnou deskou), hledí na vrchol láhve – bod *L* – a na plátně vyznačuje jeho obraz *L´*. Na zjednodušeném pohledu ze strany (obr. 4) vidíme plátno jako svislou úsečku, oko malíře je bod *O*. Body *L* a *L´* leží na přímce, která bodem *O* prochází. Polopřímce *OL* říkáme promítací paprsek, přímce *OL* promítací přímka bodu *L*. Průsečík promítací přímky *OL* s průmětnou (rovinou, do níž promítáme) je průmět (či obraz) bodu *L*, tedy bod *L´*.

Klasický fotoaparát pracuje jako náš malíř. Průmětnou je fotografická „deska“, okem *O* čočka fotoaparátu. Fotografie na obr. 5 odpovídá celkem věrně našemu pohledu na láhev.

Technikovi fotografie nestačí. Musí zobrazit láhev takovým způsobem, aby se z obrázku dal přesně vyčíst její tvar i velikost. Často proto využívá Mongeovo promítání a sestrojuje půdorys a nárys (občas i bokorys) zobrazovaného objektu (obr. 1). V technickém kreslení se pro zjednodušení daného obrazu užívají různé úmluvy a výkres je doplněn kótami a dalšími značkami (obr. 2).

Nejen laik bez technického vzdělání vždy ocení názorný obraz například v kosoúhlém promítání (obr. 6) nebo v pravoúhlé axonometrii (obr. 7) či v lineární perspektivě. Počítačové programy mohou vytvořit různé varianty obrazů. Na obr. 8 vidíme jednu z nich.

Volné pole fantazie při tvorbě obrazů mají malíři. V podání malíře ctícího kubismus může obraz naší láhve získat i tvary velmi bizarní (obr. 9). Na rozdíl od potřeb techniků jsou možnosti tvorby umělecké mnohem rozsáhlejší. Už od počátků civilizace můžeme sledovat kresby, rytiny, malby i sochařské prvotiny schematické i realistické, popř. kombinaci různých přístupů na jednom obraze. Například ve staroegyptské tvorbě se setkáváme s tím, že umělec zpodobnil některé objekty půdorysně a jiné pomocí nárysu či dalších „pohledů“ na realitu. Podobně kreslí občas děti a stejný způsob lze nalézt i u četných ikon. Zajímavá je rovněž kombinace schematicky pojatých postav (dle staroegyptského „kánonu“) a natolik realisticky vyvedených obrazů stromů i živočichů, že biologové jsou schopni jednoznačně například určit, o kterou kachnu či květ jde.

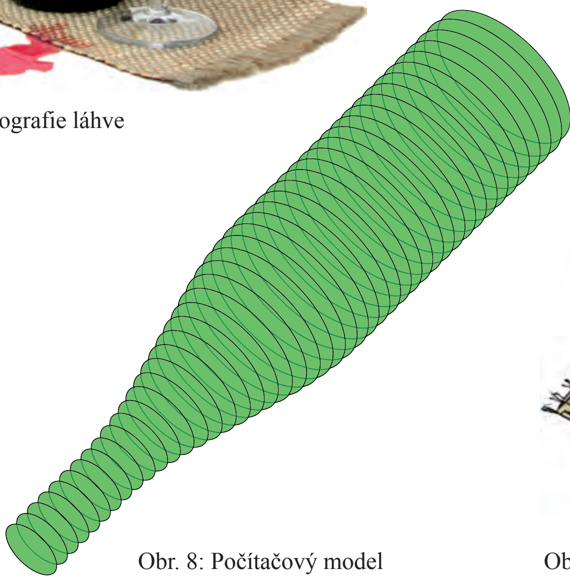


Obr. 3, 4: Malíř zobrazuje vrchol láhve

Obr. 5: Fotografie láhve

Obr. 6: Kosoúhlé promítání

Obr. 7: Pravoúhlá axonometrie



Obr. 8: Počítačový model

Obr. 9: Kubistický obraz

2.2 Volné rovnoběžné promítání

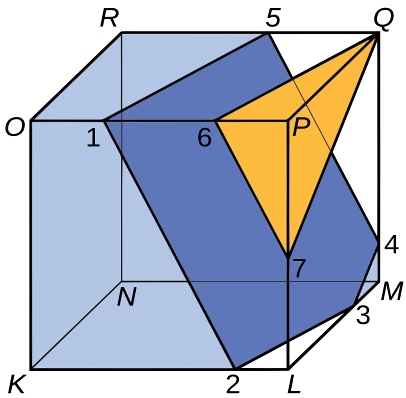
Toto promítání známe všichni ze školních učebnic. Je jednoduché a názorné. Stačí nám k ilustraci mnoha geometrických situací, ale technici by s ním příliš spokojeni nebyli. Volné rovnoběžné promítání zpravidla zadáváme obrazem krychle v průčelné poloze, což znamená, že ve skutečnosti má daná krychle dvě stěny rovnoběžné s průmětnou (ty se zobrazí jako čtverce) a čtyři svislé hrany. Krychle *KLMNOPQR* z obr. 1 má průčelné stěny *KLPO* a *NMRQ*, podstavy (vodorovné stěny) *KLMN* a *OPQR* a svislé boční stěny *KNRO* a *LMQP*. Hrany krychle kolmé k jejím průčelným stěnám jsou zobrazeny jako shodné a navzájem rovnoběžné úsečky, které svírají s obrazy svislých hran obvykle úhel 45º a jejichž délka bývá zkrácena (např. na polovinu skutečné délky hrany). Pokud vidíme horní a pravou stěnu krychle, hovoříme o nadhledu zprava. (Obecně lze říci, že je zvolena svislá průmětna v, do níž promítáme geometrické útvary z prostoru rovnoběžně, ale nikoli ve směru kolmém na průmětnu v.) Pomocí takového obrazu krychle lze řešit různé stereometrické úlohy.

Názorně však můžeme zachytit prostorové vztahy i bez obrazu krychle. Například obrázkem 2 připomínáme, že dvojice rovnoběžných rovin α, β je proťata rovinou ρ ve dvojici rovnoběžných přímek a, b. Krychle *KLMNOPQR* na obr. 1 je proťata dvojicí navzájem rovnoběžných rovin α, β. Znázorněny jsou pouze průniky těchto rovin s krychlí.

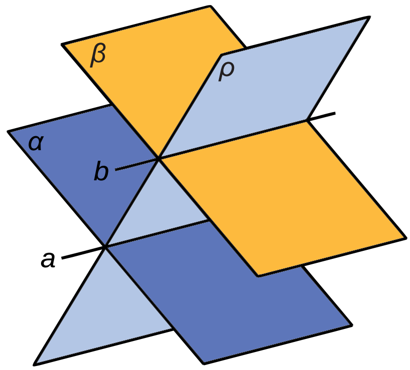
Na obr. 3 vidíme průhlednou krychli **K** s vrcholy *ABCDEFGH* a s vyznačenou tělesovou úhlopříčkou *EC*. Úsečka *13* je obrazem průniku této krychle s rovinou φ. Rovina φ se však jeví jako přímka a její průnik s krychlí názorně zobrazen není. Proto je vhodné natočit krychli tak, aby nás obrázek informoval lépe, např. o 90° podle svislé osy (viz obr. 4). Pak je dobře vidět, že body *1, 2, 3* leží na hranách krychle a spolu s bodem *D* tvoří vrcholy rovnoběžníku, který je průnikem krychle **K** s rovinou φ. Polohu bodů *1, 2, 3*, průsečíků hran a rychle s rovinou φ získáme z obr. 3, pokud víme, že rovnoběžné promítání zachovává dělicí poměry. Je-li např. bod *3* na obr. 3 středem hrany *GH*, je jím i na obr. 4. Podobně můžeme bod *X*, průsečík úsečky *EC* s rovinou φ, na obr. 3, sestrojit i v obr. 4. Pokud budeme předpokládat, že rovnoběžník *123D* není průhledný, upravíme i viditelnost (třeba zvýrazníme viditelné části úhlopříčky *EC* a hran krychle).

Na obou obrázcích jsou znázorněny ještě body *V* a *W*. Bod *V* leží na hraně *BF*, bod *W* na hraně *CD*. Na obr. 3 však jejich průměty splývají. Znamená to, že přímka *VW* je přímkou směru promítání. Takovým přímkám říkáme přímky promítací. Rovněž rovina φ na obr. 3 je rovinou promítací, protože takové přímky (promítající se v daném případě do bodu) obsahuje. Na obr. 4 se jejich poloha vůči směru promítání změnila, a proto zde přímka *VW* ani rovina φ promítací není.

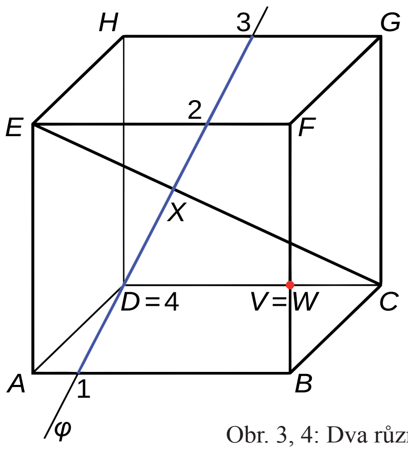
Obrázek 5 dokládá, že i ve volném rovnoběžném promítání můžeme řešit složitější úlohy. Na vodorovné rovině π stojí krabička tvaru pětibokého kolmého hranolu, která je seříznutá rovinou ρ procházející přímkou p v rovině π a bodem *A´*. To stačí, abychom mohli přesně sestrojit obraz dolního dílu rozříznuté krabičky. Například bod *3* je společným bodem roviny π (leží na přímce roviny π), roviny stěny *AA´B* (leží na přímce *AB* roviny stěny) a roviny řezu ρ (leží na přímce *A´B´* roviny řezu). Stejně významné jsou i body *1*, *2* a *4* na přímce p. (Všimněte si, že obraz pětiúhelníku podstavy a pětiúhelníku řezu jsou ve vztahu afinity s osou p, která je společnou přímkou roviny podstavy a roviny řezu krabičky.) Přestože je tento obrázek správně zkonstruovaný i dostatečně názorný, skutečný tvar krabičky neznáme. Nevíme totiž, jak bylo právě toto volné promítání zadáno.

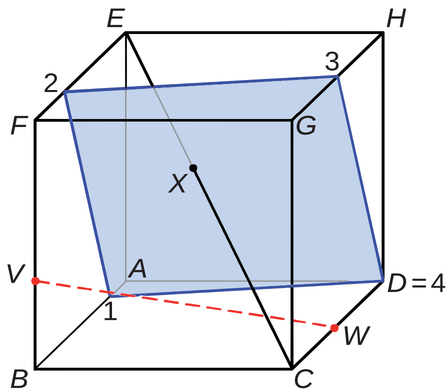


Obr. 1: Řezy krychle rovinami

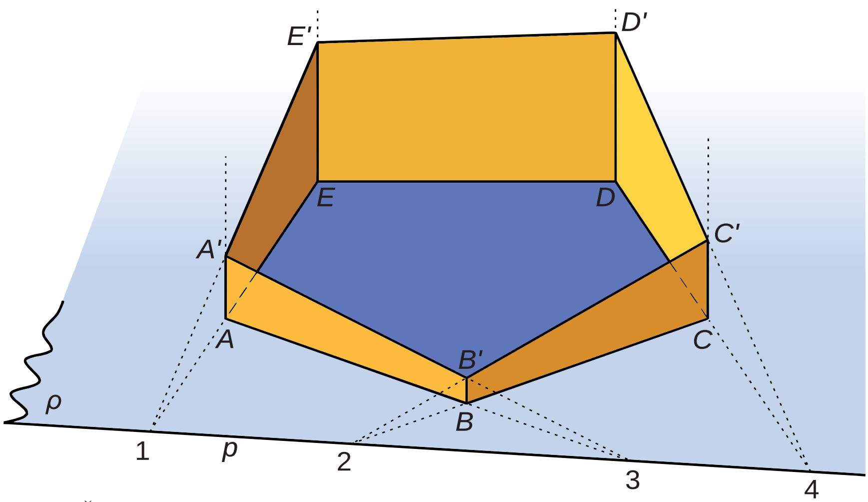


Obr. 2: Vzájemná poloha tří rovin



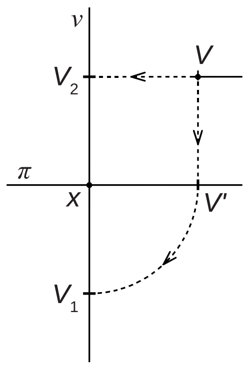


Obr. 3, 4: Dva různé pohledy na tutéž krychli

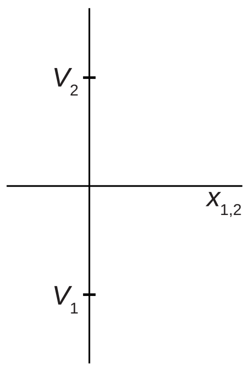


Obr. 5: Část seříznuté pětiboké krabičky

2.3 Mongeovo promítání



Obr. 1: Pohled zboku



Obr. 2:
Sdružené průměty bodu

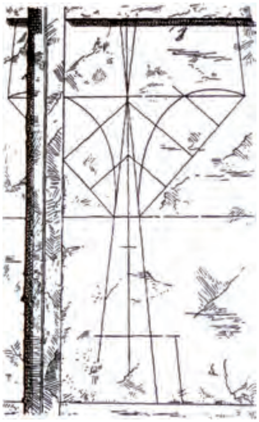
Pro technickou praxi je nejdůležitější pravoúhlé promítání na dvě navzájem kolmé průmětny, půdorysnu a nárysnu, v němž každému útvaru prostoru odpovídá dvojice sdružených průmětů – půdorys a nárys tohoto útvaru. Pravoúhlé průměty těles (sochy, domy, stavební prvky) do roviny byly známy již ve starověku. Dochovaly se v podobě rytin do kamene ve staroegyptských chrámech, na hliněných tabulkách jako plánky měst a opevnění apod. Na obr. 3 je zachycen nákres řezu římsou pylonu u chrámu v Edfu ze 4. století př. n. l. i s návodem, jak římsu zkonstruovat. Půdorys Tempietta San Pietro in Montorio pochází od Bramanta (obr. 4), nárys věže chrámu sv. Štěpána vyhotovil na pergamenu H. Zierhold (obr. 5). Výkresy Petra Parléře z výstavby katedrály Sv. Víta v Praze přešly s jeho spolupracovníky kolem r. 1420 do Vídně, kde jsou archivovány dosud. Dokládají vysokou technickou odbornost i kreslířskou zručnost tehdejších stavitelů.

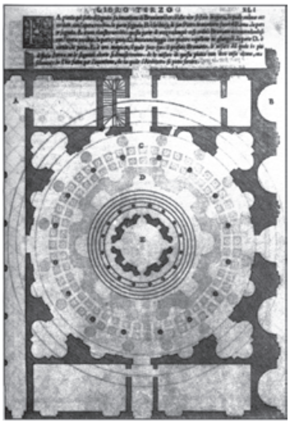
V roce 1798 vyšlo první vydání knihy deskriptivní geometrie, kterou po mnoha letech nuceného utajování (šlo o vojenské tajemství usnadňující projektování vojenských pevností) vydal Gaspard Monge. Ukázal, že lze pomocí sdružených průmětů řešit různé stereometrické úlohy s velkou přesností přímo na papíře. Na obr. 7 vidíme jeho řešení vrženého stínu koule při rovnoběžném osvětlení na rotační válec stojící na půdorysně. Podobnou úlohu řešil i gymnazista (obr. 8.), který osvětloval krychli vznášející se nad půdorysnou a vrhající svůj stín částečně na ni a částečně na druhou průmětnu (na „podlahu a stěnu místnosti“).

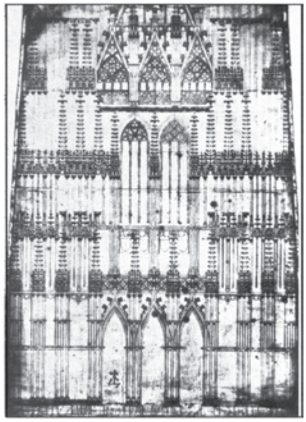
Podstatou Mongeova promítání je vytváření sdružených průmětů bodů prostoru (obr. 1) pomocí jejich kolmých průmětů do vodorovné a svislé roviny. Tak každému bodu V odpovídá dvojice bodů V_1 a V_2. Aby bylo možné pracovat „na jednom papíře“, otočí se vodorovná rovina podle společné přímky x do roviny svislé a bod V_1 se tak dostane na svislou přímku procházející bodem V_2 (obr. 2). Body V_1, V_2 – půdorys a nárys bodu V – leží na jedné ordinále. Bod V v prostoru můžeme snadno vymodelovat. Půdorys bodu V známe, výška nad půdorysnou rovinou je rovna vzdálenosti bodu V_2 od osy x.

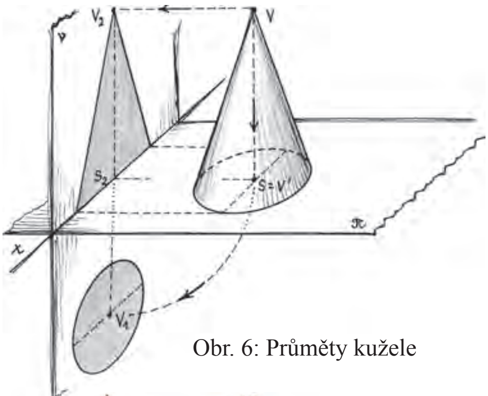
Pomocí názorného obrázku 6 si snadno celý postup představíme. Rotační kužel stojí na půdorysné rovině, jeho druhým průmětem je rovnoramenný trojúhelník a prvním průmětem kruh. Po otočení půdorysné roviny dostáváme (ve svislé rovině) sdružené průměty kužele.

Aby bylo možné tělesa z rysu jednoznačně rekonstruovat, je vždy třeba jejich dvou různých průmětů sestrojených dobře definovanými postupy. Technici občas místo prvních průmětů užívají pouze druhý průmět „vhodných“ těles, ale výkres doplňují tzv. technickým osvětlením, tj. vybraným rovnoběžným osvětlením. Na obrázku 9 je rys studenta reálky řešící technické osvětlení sloupku složeného z rotačních těles. Stín vržený na stěnu za sloupkem hraje roli dalšího průmětu sloupku.

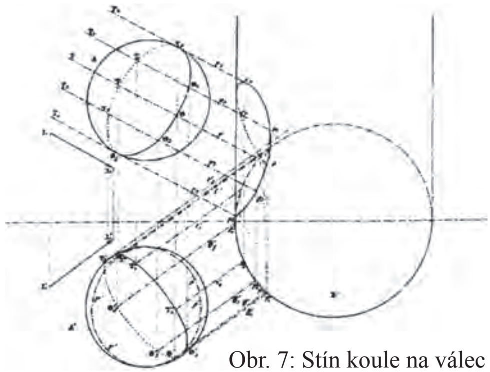

Obr. 3: Řez římsou pylonu

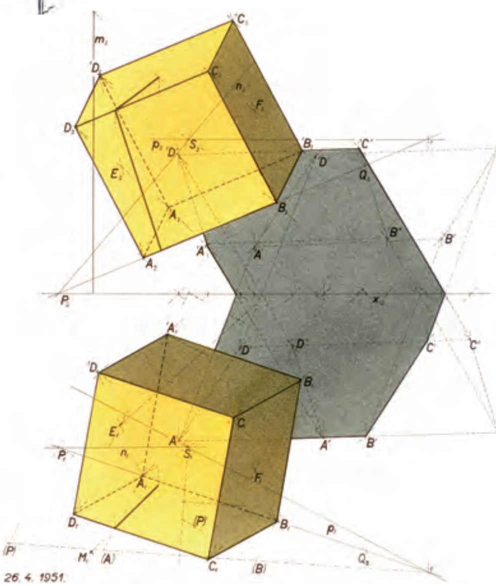

Obr. 4: Půdorys kostelíku


Obr. 5: Nárys věže chrámu

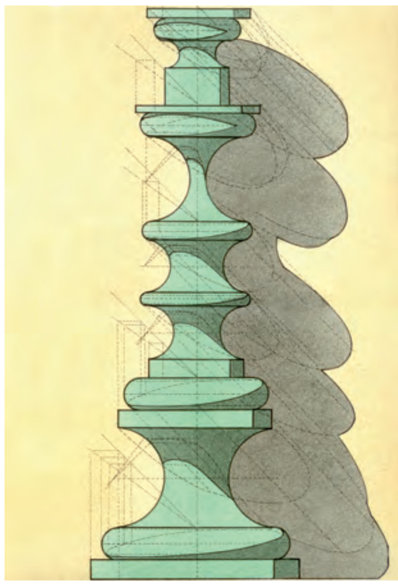


Obr. 6: Průměty kužele

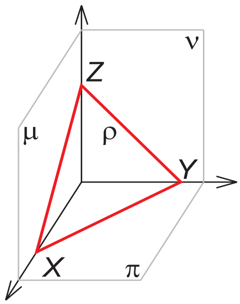

Obr. 7: Stín koule na válec



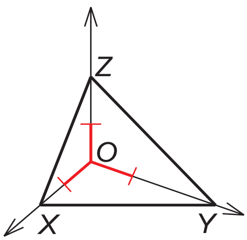
Obr. 8: Osvětlení krychle


Obr. 9: Technické osvětlení sloupku

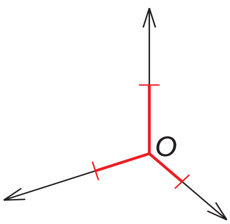
2.4 Axonometrie



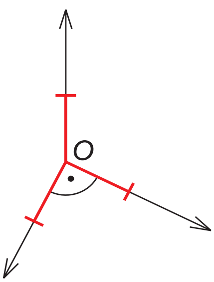
Obr. 1: Axonometrická rovina ρ



Obr. 2: Pravoúhlá axonometrie



Obr. 3: Kosoúhlá axonometrie



Obr. 4: Vojenská perspektiva

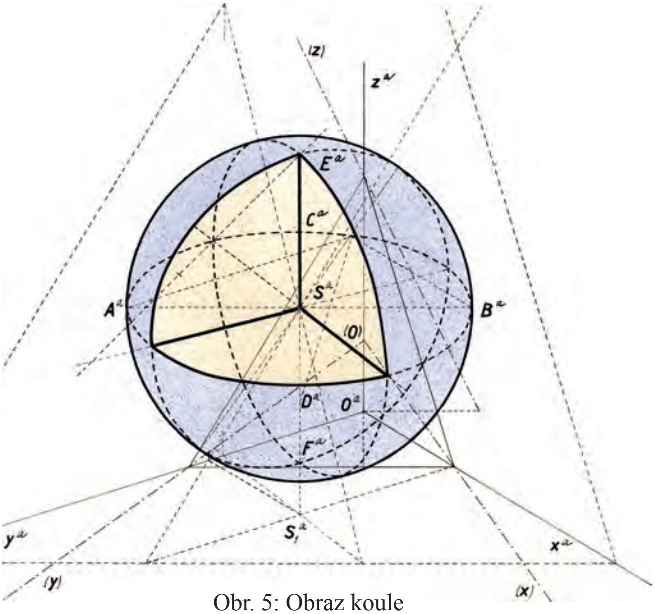
Snaha po co nejnázornějším zobrazení vedla ke vzniku dalších promítacích metod – axonometrií. Jde vždy o rovnoběžná promítání, ale průmětna ρ (nákresna) není žádnou z rovin, které obsahují osy x, y, z. Na obr. 1 je znázorněna v kosoúhlém promítání. Neprochází počátkem a protíná roviny π, ν, μ v průsečnicích, které vytínají trojúhelník XYZ.

V pravoúhlé axonometrii zadané ostroúhlým axonometrickým trojúhelníkem XYZ (obr. 2) se body prostoru promítají do roviny ρ kolmo. Průmět počátku je průsečíkem výšek trojúhelníku XYZ. Průměty jednotkové úsečky ležící na osách x, y, z mohou mít různou délku. Musí se zjistit konstrukcí (obr. 6). Rovinu os x, y, které jsou navzájem kolmé, otočíme podle přímky XY do nákresny ρ a v tomto otočení sestrojíme jednotkové úsečky ve skutečné velikosti. Jejich koncové body promítneme zpět na obrazy os x, y. Stejným způsobem sestrojíme obraz jednotkové úsečky na ose z. Je-li však axonometrický trojúhelník XYZ rovnostranný, jsou obrazy všech jednotek shodné a hovoříme o izometrii.

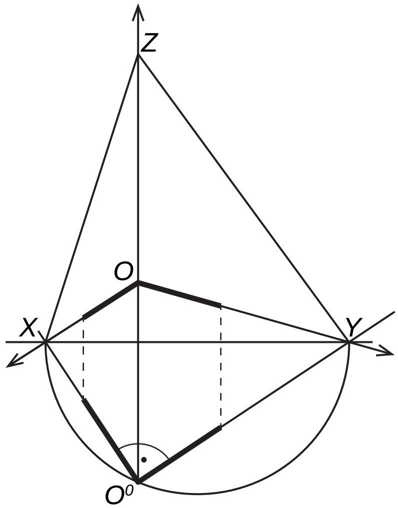
Protože tato axonometrie je pravoúhlým promítáním, zobrazí se v ní koule jako kruh (viz Mongeovo promítání) a kružnice ležící v rovinách π, ν a μ jako elipsy s hlavní osou rovnoběžnou s jednou stranou trojúhelníku XYZ. Obojí vidíme na obr. 5. Studentka zde před lety zobrazila v pravoúhlé axonometrii kouli, z níž je vykrojena jedna osmina. Vodorovná rovina procházející středem koule ji protíná v kružnici, jejímž obrazem je elipsa. (Obdobné je to pro zbývající dvě roviny – představte si například rovník a poledníky na globu.)

Kosoúhlá axonometrie zadaná obrazem trojice navzájem kolmých os x, y, z s jednotkovými úsečkami (obr. 3) je podobná volnému rovnoběžnému promítání. Je výhodná pro názorné zobrazení jednoduchých těles stojících vhodně na rovině π. Pomocí jednoduchých konstrukcí (Rytzovy apod.) se mohou snadno sestrojit elipsy, které jsou obrazy kružnic v rovinách rovnoběžných s rovinami π, ν a μ, ale obrazem koule není kruh a obecnější konstrukce jsou poměrně složité. S touto axonometrií se setkáváme v technickém kreslení a v učebnicích pro průmyslové školy, kde jsou popisovány jednotlivé součástky strojů atd. (obr. 7).

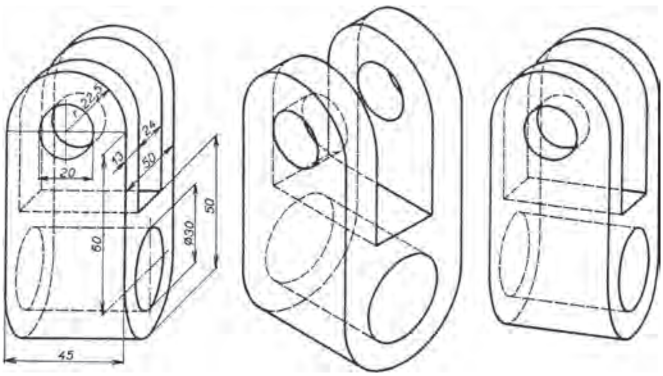
Z historického hlediska je zajímavá „speciální kosoúhlá axonometrie“ (občas se jí říká vojenská perspektiva), která zachovává tvar půdorysů zobrazených budov (obr. 4). Obrazy os x, y jsou na sebe kolmé a jednotky stejně dlouhé. Osa z je svislá a obraz jednotkové úsečky na ní bývá často delší než na zbývajících osách. Taková ve vojenské perspektivě sestrojená rytina města byla neocenitelnou pomůckou pro armádu, která se o jeho dobytí pokoušela. Nejen že znala v podstatě plán města, ale snadno se v něm mohla orientovat pomocí zobrazených výškových budov. (V baroku se to stávalo velmi často. Právě v době třicetileté války byly mnohými vládami doceněny plány, mapy států a „moderní vojenská technika“.) Na obr. 8 je ve vojenské perspektivě zobrazena rotunda se čtyřmi kaplemi a s tzv. lucernou s okénky, jimiž přicházelo světlo do vnitřního prostoru.



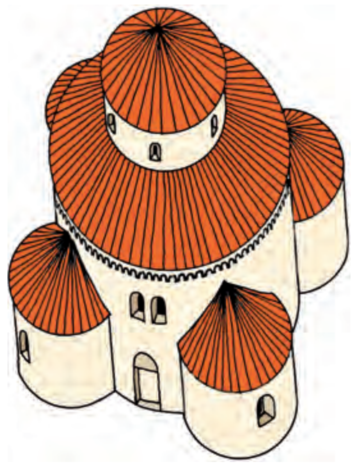
Obr. 5: Obraz koule



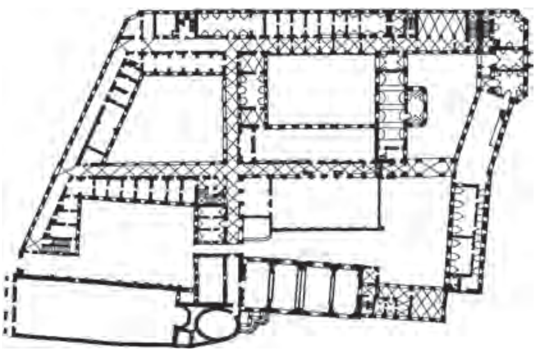
Obr. 6: Konstrukce jednotkových úseček



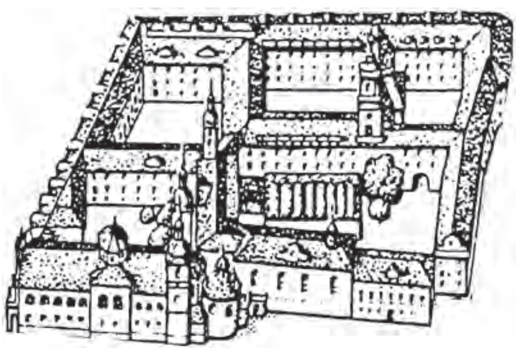
Obr. 7: Součástka v kosoúhlém promítání a dvou různých axonometriích



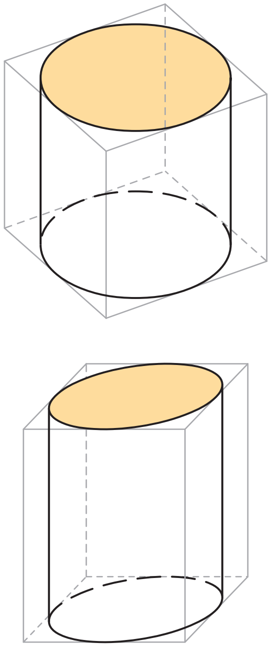
Obr. 8:
Rotunda ve vojenské perspektivě



Obr. 9: Půdorys Klementina



Obr. 10: Klementinum ve vojenské perspektivě



Obr. 11:
Válec v axonometrii
a kosoúhlém promítání

I v současnosti se s užitím této axonometrie setkáváme, např. při rekonstrukcích historických budov nad „známými základy“. Tak v monografiích o Pražském hradu nacházíme půdorys zaniklé rotundy knížete Václava ve vojenské perspektivě s rekonstrukcí jejího vnějšího vzhledu. Její základy byly skutečně odkryty archeology při výstavbě Chrámu sv. Víta. Takovýto obrázek je názornější než klasické stavební plány. V literatuře o architektuře nacházíme často i tzv. perovky – přesné, ale ne vždy rýsované černobílé obrázky, na nichž je axonometrický pohled na budovu doplněn i jejím řezem. Odříznutý díl stavby je oddělen, aby čtenář viděl i část vnitřního prostoru.

Vraťme se k pravoúhlé axonometrii. Protože je obzvlášť vhodná ke konstrukci názorných obrazů rotačních ploch a těles s osou rotace kolmou k půdorysně, ukažme si na jednoduchém příkladě postup práce (obr. 15).

Je dán axonometrický trojúhelník *XYZ* a obraz osy *o* rotace rotačního komolého kužele, který stojí na půdorysně. Průsečík přímky *o* s půdorysnou je středem *S* podstavného kruhu kužele. Při konstrukci kužele si pomůžeme „pohledem zboku“, tedy pravoúhlým průmětem kužele do „vhodné roviny“ – pomocné průmětny procházející osou *z* a kolmou na přímku *XY*. (Popis je mnohem složitější než sama konstrukce, tato pomocná rovina se zobrazí jako přímka *ZQ*, tj. na obraz osy *z*.) Abychom ten pomocný průmět kužele viděli, musíme sklopit rovinu *ZOQ* do průmětny – a aby se nám nepletl do výsledného obrázku, vysuneme ho (zde vpravo) stranou rovnoběžně s přímkou *XY*.

V pravoúhlé axonometrii jsou v učebnicích v podstatě zobrazována tělesa jako válce, kužele a koule (obr. 16). Občas tam však vídáme chybně znázorněnou dvojici těles – krychli či hranol ve volném rovnoběžném promítání spolu s koulí či válcem – v naší axonometrii (obr. 11). Svědčí to o tom, že autor obrázků dostatečně nerozumí deskriptivní geometrii. Rys na obr. 14 – plášť seříznutého hranolu rovnoběžně osvětleného – dokládá názornost tohoto promítání.

Jiným typem vysouvání obrazu (v podstatě použitím půdorysu a nárysu tělesa), tentokrát v kosoúhlé axonometrii, je sestrojen obraz pravidelného dvanáctistěnu (obr. 13).

Zjednodušením této konstrukce je tzv. zářezová metoda. Umožňuje velmi rychle získat názorný obraz mnohostěnů z jejich půdorysů a nárysů, které umístíme podobně jako na obr. 12 „hmotné“ písmeno *H*. Z takovýchto obrazů ale určení skutečného tvaru či rozměrů tělesa možné není, pokud neznáme vhodné informace předem.